Concours CAE session 2018

Composition : <u>Mathématiques 2</u> (stat, proba, Informatique)

Durée : 3 Heures

Consignes pour les candidats	Merci de ne rien marquer sur le sujet. Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible. Répondez sur la grille séparée qui comporte 20 questions (Q1 à Q20). Seules les grilles correctement remplies seront corrigées.

<u>Exercice 1</u> : On dispose d'un lot de 100 bulletins sur lesquels figurent les réponses (*oui, non*) à trois questions. Les nombres de réponses *oui* aux questions **1, 2** et **3** sont respectivement 60, 40 et 30 (les candidats peuvent avoir répondu *oui* à d'autres questions). Les nombres de bulletins qui ont répondu *oui* aux deux questions **1 et 2, 1 et 3, 2 et 3** sont respectivement 24, 15 et 12. Enfin 10 bulletins ont répondu *oui* aux trois questions.

Question 1) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu deux *oui* et un *non* ?

A) 0,75
B) 0,21
C) 0,5
D) 1
E) *Je passe*

Question 2) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un *oui* et deux *non* ?

A) 0,58
B) 0,75
C) 0
D) 0,10
E) *Je passe*

Question 3) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu trois *non* ?

A) 1
B) 0,5
C) 0,15
D) 0,11
E) *Je passe*

<u>Exercice 2</u> : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\{0,1,2,\dots,n\}$ telle que :

$$\forall k \in \{0,1,2,\dots,n\},\ P(X=k)=\beta\frac{C_n^k}{k+1}.$$

Question 4) Déterminer β.

A) 0,5
B) $\frac{n}{2^n-1}$
C) $\frac{n+1}{2^{n+1}-1}$
D) $\frac{n}{n+1}$
E) *Je passe*

Question 5) Calculer, si possible, l'espérance de X.

A) $\frac{n}{n+1}$
B) $\frac{n^2}{2^n-1}$
C) n'existe pas
D) $\frac{n^2}{n+1}$
E) *Je passe*

<u>Exercice 3</u> : Une machine fabrique des microprocesseurs ; dans la production, 20 % sont défectueux.

Question 6) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de microprocesseurs fonctionnant, issus d'un lot de trois microprocesseurs produits par cette machine. Déterminer la probabilité qu'il y ait dans ce lot au moins deux microprocesseurs qui fonctionnent?

A) 0
B) 0,575
C) 0,896
D) 1
E) *Je passe*

Pour améliorer la fiabilité du produit fini, à la sortie de la machine on fait un test ; un produit bon est accepté avec une probabilité de 0,9 et un produit mauvais est refusé avec une probabilité de 0,6.

Question 7) Quelle est la probabilité qu'un microprocesseur sortant de la machine soit accepté ?

A) 0,5
B) 1
C) 0,8
D) 0
E) *Je passe*

Question 8) Quelle est la probabilité qu'un microprocesseur accepté soit bon ?

A) 0,9
B) 0,8
C) 0,5
D) 1
E) *Je passe*

Exercice 4 : Soit f la densité d'une variable aléatoire réelle X définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0 \\ x e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

Question 9) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

A) $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$

B) $F(x) = 1 - xe^{-\frac{x}{2}}$

C)

$F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$, si $x > 0$; $F(x) = 0$, sinon

D)

$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$, si $x > 0$; $F(x) = 0$, sinon

E) *Je passe*

Question 10) On pose $Y = \frac{1}{2}X^2$.

Déterminer la densité de probabilité de Y.

A) $g(y) = ye^{-\frac{y^2}{2}} \quad (y > 0)$

B) $g(y) = ye^{-y} \quad (y > 0)$

C) $g(y) = e^{-y} \quad (y > 0)$

D) $g(y) = ye^{y} \quad (y < 0)$

E) *Je passe*

Exercice 5 : Soient (X, Y) un couple aléatoire discret tel que :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}, \; P(X = j; Y = k) = \alpha (j + k) \left(\frac{1}{3}\right)^{j+k}.$$

Question 11)

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \sum_{j=0}^{+\infty} (j + k) \left(\frac{1}{3}\right)^{j+k}$.

A) $\frac{k(1+2k)}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

B) $\frac{1+2k}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

C) $\frac{k(1+2k)}{2}$

D) *Je passe*

E) $\frac{k(k+1)(1+2k)}{6}$

Question 12) Déterminer la valeur de α .

A) $\frac{9}{4}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{3}$

E) *Je passe*

Exercice 6 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Question 13) Déterminer la densité de probabilité de $Y = \tan(X)$.

A) $g(y) = e^{-y} \quad (y > 0)$

B) $g(y) = \frac{1}{\pi} \quad \left(y \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$

C) $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$

D) $g(y) = \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$

E) *Je passe*

Question 14) Déterminer, si possible, l'espérance de Y.

A) Y n'a pas d'espérance

B) $E(Y) = 0$

C) $E(Y) = 1$

D) $E(Y) = 0,5$

E) *Je passe*

Exercice 7 :

Question 15) Un algorithme est :

A) un ensemble de programmes remplissant une fonction déterminée, permettant l'accomplissement d'une tâche donnée ;

B) une suite ordonnée d'instructions indiquant la démarche à suivre pour résoudre une série de problèmes équivalents ;

C) le nombre d'instructions élémentaires à exécuter pour réaliser une tâche donnée ;

D) un ensemble de dispositifs physiques utilisés pour traiter automatiquement des informations

E) *Je passe*

Question 16) Après la séquence :

--> $a = 13;\ b = 4;\ b = a,\ a = b$,

les variables a et b sont telles que :.

A) a=4 et b=13

B) a=4 et b=4

C) a=13 et b=13

D) a=13 et b=4

E) *Je passe*

Question 17) Après la séquence :

```
x = -3;
if x < -4 then y = 0;
elseif x < -3 then y = 4 - x;
elseif x < -1 then y = x * x + 6 * x + 8;
elseif x < 3 then y = 2 - x;
else y = -2;
end
```

la variable y est telle que :

A) $y = 0$

B) $y = -1$

C) $y = 7$

D) $y = -2$

E) *Je passe*

Question 18) Les lignes de commande ci-après affichent la matrice carrée A d'ordre 10, dont les coefficients d'ordre $(i,i+1)$ valent 1 pour $i=1,2,\dots,9;$ tous les autres coefficients étant nuls :

A) $A = \text{eye}(10,10)$

B)
$\text{for } i=1:10, \text{for } j=1:10, \text{if } j=i+1 \text{ then } A(i,j)=1;..$
$\text{else } A(i,j)=0; \text{end};\text{end};A$

C) $\text{for } i=1:9,\ A(i,i+1)=1;\ \text{end};\ A$

D) *Je passe*

E)
$\text{for } i=1:10, \text{for } j=1:10, \text{if } j==i+1 \text{ then } A(i,j)=1;..$
$\text{else } A(i,j)=0; \text{end}; \text{end}; \text{end};\ A$

Question 19) Que vaut p à la fin des instructions suivantes si $n=5$?

```
p = 0; k=1;
while k < n+1
  p = p+k;
  k = k+1;
end
```

A) 15

B) 10

C) 6

D) 21

E) *Je passe*

Question 20) Soit $x=(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $y=(y_i)_{i=1,\dots,n}$ deux vecteurs de réels de même taille. Les lignes de commande ci-après affichent le calcul de l'intégrale par la méthode des rectangles à droite :

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)$$

A)
$n=\text{size}(x,"*");\ I=\text{sum}((x([2:n])-x([1:n-1]))*y([2:n]))$

B)
$n=\text{size}(x,"*"); I=\text{sum}((x([2:n])-x([1:n-1]))*y([1:n-1]))$

C)
$I=0;\ \text{for } i=2:\text{length}(x),\ I=I+(x(i)-x(i-1))*y(i);$
$\text{end};\ I$

D) *Je passe*

E)
$I=0;\ \text{for } i=1:\text{length}(x),\ I=I+(x(i+1)-x(i))*y(i+1);$
$\text{end};\ I$